

Разбор задач заключительного этапа  
республиканской олимпиады по информатике  
2017 г.

30 марта 2017 г.

# День 1

# День 1

1. Простая математика
2. Путешественник
3. Статистическое шифрование
4. Находка

# Простая математика

## День 1 Задача 1

Дано:

$$a_i = \lceil \sqrt{i} \rceil + \lfloor \sqrt[3]{i} \rfloor$$

Число  $N$

Нужно:

Найти  $\sum_{i=1}^N a_i$

Производится декомпозиция:

$$\blacktriangleright a_i = b_i + c_i, b_i = \lceil \sqrt{i} \rceil, c_i = \lfloor \sqrt[3]{i} \rfloor$$

$$\blacktriangleright \sum_{i=1}^N a_i = A = B + C, B = \sum_{i=1}^N b_i, C = \sum_{i=1}^N c_i$$

Наблюдения:

- ▶  $B = (1) + (2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3) + \dots$
- ▶  $k$  встречается в сумме  $B$   $k^2 - (k - 1)^2 = 2k - 1$  раз
- ▶  $B = \sum_{k=1}^{\lceil \sqrt{N} \rceil} k \cdot f(k, N)$
- ▶ аналогично  $k$  встречается в сумме  $C$   $(k + 1)^3 - k^3$  раз
- ▶  $C = \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor} k \cdot g(k, N)$

# Простая математика

## День 1 Задача 1

Итоговая асимптотика:

$$O(\sqrt{N})$$

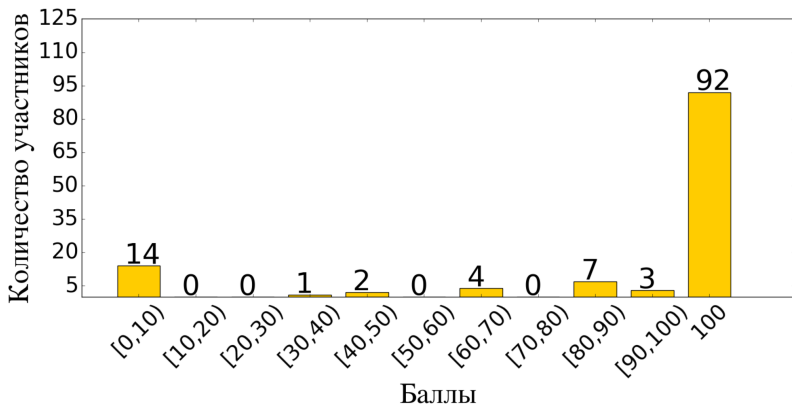
Сложность задачи:

Низкая

# День 1 Задача 1

## Результаты

Распределение баллов по задаче 1 первого дня





# Путешественник

## День 1 Задача 2

Дано:

Граф, связный вершинный кактус, с  $N$  вершинами и  $M$  рёбрами  
Стартовая вершина  $S$

Нужно:

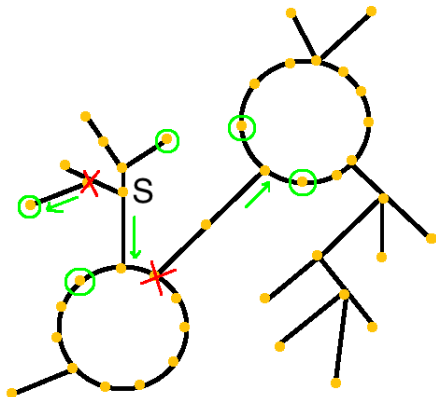
Найти количество вершин, в которых могут заканчиваться все различные простые пути, начинающиеся в  $S$ , которые не могут быть продолжены

# Путешественник

## День 1 Задача 2

Рассматриваются случаи:

- ▶ Если граф – дерево, то путь может быть закончен только в листе
- ▶ Если граф – цикл, то путь может быть закончен в одной из двух соседних с  $S$  вершин



# Путешественник

## День 1 Задача 2

Замечания:

- ▶  $S$  – может быть листом
- ▶ Для любого пути из  $S$  и любого цикла есть ровно 1 вершина «входа»

# Путешественник

## День 1 Задача 2

Собирая воедино:

- ▶ разбиваем граф на циклы и вершины, которые не лежат на циклах
- ▶ для каждого цикла определяем «вход»
- ▶ для соседей входа и вершин не на циклах определяем, не являются ли они кандидатами на финальную вершину пути

# Путешественник

## День 1 Задача 2

Итоговая асимптотика:

$O(N)$

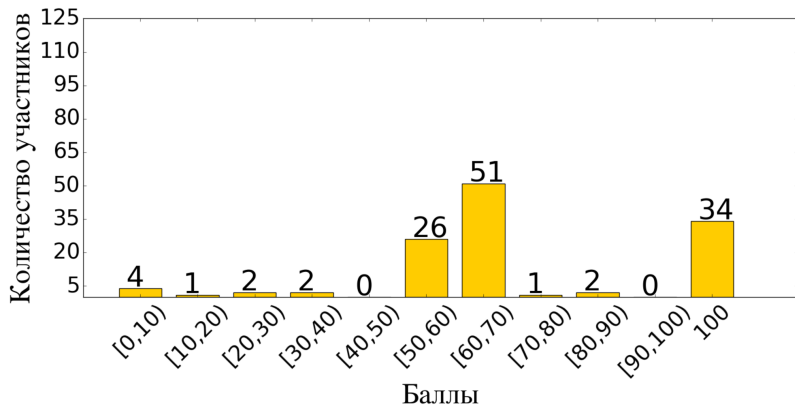
Сложность задачи:

Средняя

# День 1 Задача 2

## Результаты

Распределение баллов по задаче 2 первого дня



# Статистическое шифрование

## День 1 Задача 3

Дано:

Массив из  $N$  различных чисел

Размер окна  $M$

$K$  запросов  $k_i$

Нужно:

Для каждого  $k_i$  найти максимальное значение  $k_i$ -ой порядковой статистики по всем подотрезкам массива длины  $M$

# Статистическое шифрование

## День 1 Задача 3

- ▶ Пусть изначально последовательность состоит из  $N$  пустых ячеек, т.е. в каждом  $N - M + 1$  окне нет ни одного числа
- ▶ Добавляем элементы  $a_i$  в порядке возрастания
- ▶ Для всех окон будем следить за количеством элементов в него попавших ( $C_j$ )
- ▶ Если после добавления очередного элемента  $x$  минимум из  $C_j$  изменяется и становится равен  $k$ , то максимум из  $k$ -ых порядковых статистик равен  $x$



# Статистическое шифрование

## День 1 Задача 3

- ▶ Заметим, что  $a_i$  попадает в окна с индексами  $\max(1, i - M + 1) \leq j \leq i$
- ▶ Для контроля значений  $C_j$  можно использовать дерево отрезков с операциями добавления единицы на отрезке и нахождения глобального минимума

# Статистическое шифрование

## День 1 Задача 3

Итоговая асимптотика:

$$O(N \log N)$$

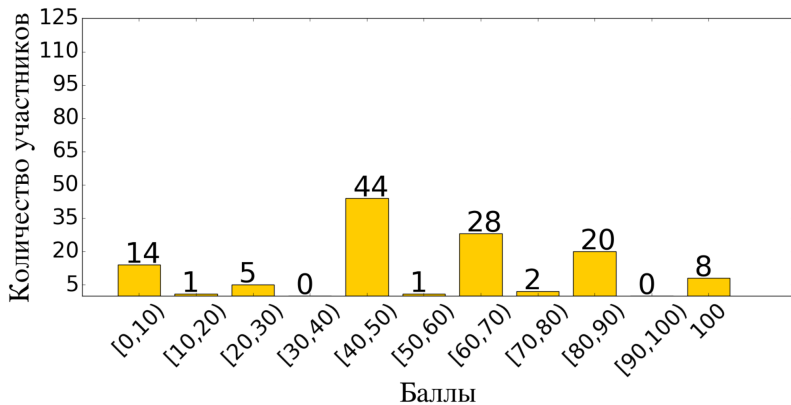
Сложность задачи:

Высокая

# День 1 Задача 3

## Результаты

Распределение баллов по задаче 3 первого дня



# Находка

## День 1 Задача 4

### Дано:

Запросы «добавить по одному младшему разряду к двум числам»

Запросы «удалить  $k$  младших разрядов у каждого из чисел»

Запросы «найти  $p$ -ый разряд суммы двух чисел»

### Нужно:

Обработать все запросы

# Находка

## День 1 Задача 4

A 


	a	
--	---	--

B 

	b	
--	---	--

Sum 

	$(a+b+?)\%10$	99999999X
--	---------------	-----------



Возможные подходы:

1. Хранить количество 9-ок на префиксе и бинарным поиском искать первую не 9-ку
2. Работать с группами 9-ок: для первой 9-ки в каждой группе хранить длину группы, для остальных 9-ок, хранить начало группы.

Если  $a_p + b_p \neq 9$ , то проверить, начинается ли в  $p + 1$  группа и что идёт за ней, иначе прыгнуть в начало группы, узнать длину и сделать аналогичную проверку

Находка

День 1 Задача 4

Итоговая асимптотика:

$O(N)$

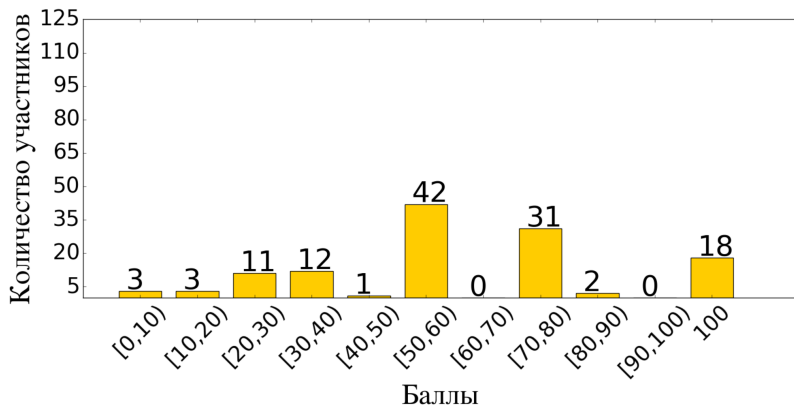
Сложность задачи:

Средняя

# День 1 Задача 4

## Результаты

Распределение баллов по задаче 4 первого дня

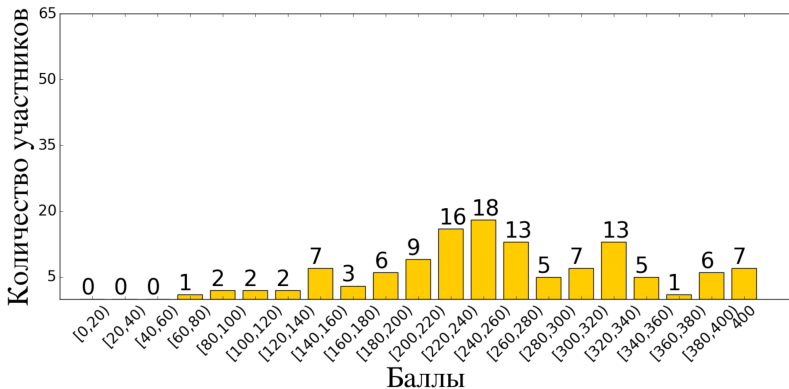




# День 1

## Результаты

Распределение суммы баллов по первому дню



# День 2

1. Эволюция
2. Новый факультатив
3. Шкаф с футболками
4. Парковка

# Эволюция

## День 2 Задача 1

Дано:

Строка длины  $N$  из символов  $A, C, G, T$

Размер окна  $K$

Нужно:

Найти количество подстрок длины  $K$  с различными количественными характеристиками 4 элементов

# Эволюция

## День 2 Задача 1

Что нужно:

- ▶ 4 счётчика
- ▶ Скользящее окно длины  $K$
- ▶ Список количественных характеристик просмотренных подстрок

Как решить:

- ▶ При переходе уменьшаем один счётчик, увеличиваем другой
- ▶ Добавляем полученный кортеж из 4 чисел в список
- ▶ Сортируем список
- ▶ Находим количество различных кортежей

# Эволюция

## День 2 Задача 1

Итоговая асимптотика:

$$O(N \log N)$$

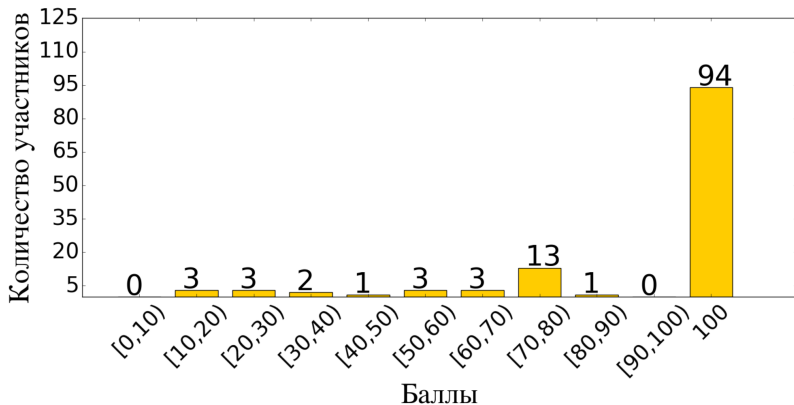
Сложность задачи:

Низкая

# День 2 Задача 1

## Результаты

Распределение баллов по задаче 1 второго дня





# Новый факультатив

## День 2 Задача 2

Дано:

Последовательность длины  $N$

Нужно:

Разбить последовательность на минимальное количество отрезков так, чтобы она сортировалась перестановкой только отрезков

# Новый факультатив

## День 2 Задача 2

Подготовка:

- ▶ Удалить одинаковые подряд идущие элементы последовательности
- ▶ Перенумеровать элементы натуральными последовательными числами от 1 до некоторого  $K$ , сохранив их относительный порядок
- ▶ Построить массив  $P = \{p_{ij}\}$  – позиция  $j$ -ого вхождения числа  $i$
- ▶ Вычислить  $C_x$  – количество вхождений числа  $x$  в последовательность

# Новый факультатив

## День 2 Задача 2

Пусть  $f(p_{x,i})$  - минимальное количество отрезков, на которое нужно разбить последовательность, чтобы можно было отсортировать первые  $C_1 + C_2 + \dots + C_x = C'$  чисел, при этом  $C'$ -ым числом в отсортированной последовательности будет число с позиции  $p_{x,i}$  исходной последовательности

Наблюдения:

- ▶  $f(p_{x,k}) = \min_{i,j \neq k} f(p_{x-1,i}) + C_x - \delta_{i,j}$ , где  $\delta_{i,j} = [i + 1 = j]$
- ▶  $\min_i f(p_{x-1,i}) + C_x - 1 \leq f(p_{x,k}) \leq \min_i f(p_{x-1,i}) + C_x$ , т. е. есть только две возможности для  $f(p_{x,k})$
- ▶ Тогда можно для каждого  $x$  хранить две позиции  $i'$  и  $i''$  с минимальными значениями  $f(p_{x,i'}) = f(p_{x,i''}) = \min_i f(p_{x,i})$  такие, что на местах  $i' + 1$  и  $i'' + 1$  стоят числа  $x + 1$  (если они есть) и для вычисления  $f(p_{x+1,j})$  использовать только их
- ▶ Отдельно нужно рассмотреть случай, когда  $C_x = 1$

Решение:

- ▶ Перебирать  $x$  от 1 до  $K$
- ▶ Вычислить  $f(p_{x,j})$ , попутно запомнив  $i'(x)$  и  $i''(x)$

Замечание:

- ▶ Значение ДП вычисляется 1 раз для каждой из позиций

# Новый факультатив

## День 2 Задача 2

Итоговая асимптотика:

$O(N)$

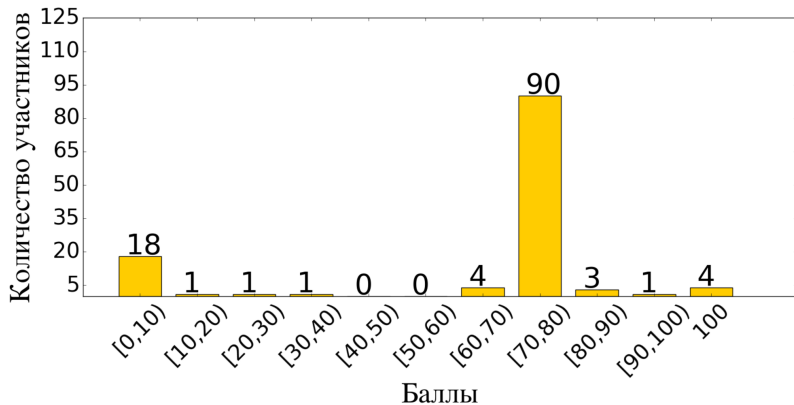
Сложность задачи:

Высокая

# День 2 Задача 2

## Результаты

Распределение баллов по задаче 2 второго дня



# Шкаф с футболками

## День 2 Задача 3

Дано:

Последовательность длины  $\sum_{i=1}^N K_i = M$

Число  $D$

Нужно:

Разбить последовательность на отрезки длины не меньше  $D$  так, что сумма НОДов чисел в отрезках будет максимально возможной



# Шкаф с футболками

## День 2 Задача 3

Если обозначить через  $S_i$  – оптимальную сумму НОДов после разбиения на отрезки первых  $i$  чисел, то напрашивается рекуррентное соотношение:

$$S_i = \max_{j \leq i-D} S_j + \text{GCD}\{a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_i\}$$

Тогда нужно:

1. Искать НОД чисел на отрезках  $[1, i], [2, i], \dots, [i - D + 1, i]$
2. Искать максимум  $S_j, j \leq i - D$

# Шкаф с футболками

## День 2 Задача 3

Про НОД:

- ▶  $\text{НОД}\{a_1, \dots, a_i\} \leq \text{НОД}\{a_2, \dots, a_i\} \leq \dots \leq \text{НОД}\{a_i\}$
- ▶ НОД чисел на отрезках  $[1, i], [2, i], \dots, [i - D + 1, i]$  может принимать не более, чем  $\log a_i$  различных значений, т.е. все отрезки разбиваются на группы, для которых НОД одинаков; можно поддерживать множество этих групп
- ▶ Когда совершается переход от  $i$  к  $i + 1$  и пересчитываются НОДы на отрезках, некоторые соседние группы из множеств могут объединиться, какие-то группы останутся неизменными, возможно появится новая группа из отрезка единичной длины

# Шкаф с футболками

## День 2 Задача 3

Про поиск максимумов:

- ▶ Не нужно искать максимум по всем отрезкам, главное находить максимум среди НОДов для групп
- ▶ Можно использовать дерево отрезков с поиском максимума на отрезке
- ▶ Если правая граница группы меньше, чем  $i - D$ , то группу можно рассматривать целиком и сохранить максимум (чтобы не ходить в ДО)
- ▶ Если группу придётся разбивать (таких групп не больше, чем 1), то максимум найдётся в ДО

# Шкаф с футболками

## День 2 Задача 3

Итоговая асимптотика:

$$O(N \log N + N \log A)$$

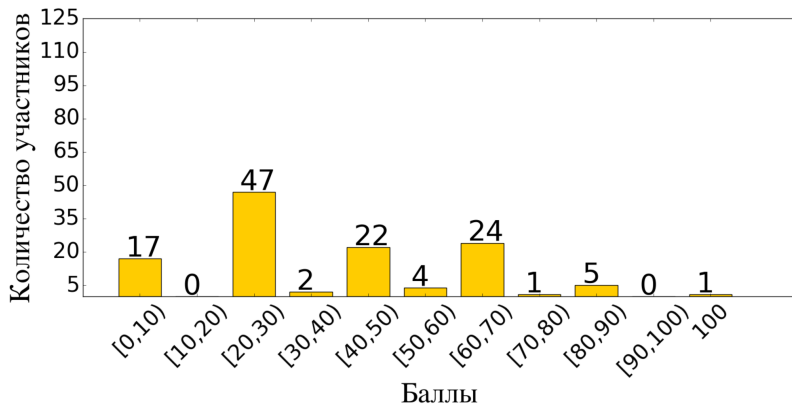
Сложность задачи:

Высокая

# День 2 Задача 3

## Результаты

Распределение баллов по задаче 3 второго дня



# Парковка

## День 2 Задача 4

Дано:

Размеры стоянки  $K$  запросов вида  $\{t_{in}, t_{out}\}$

Нужно:

Обработать как можно больше запросов, предоставив место на парковке с возможностью въезда в момент  $t_{in}$  и выезда в момент  $t_{out}$

Возможные варианты:

- ▶ Стандартная парковка вида: ряд – проезд – 2 ряда – проезд – 2 ряда – проезд ...
- ▶  $M$  стеков высоты  $N - 1$
- ▶  $M - 1$  двунаправленная очередь по  $N - 2$  элемента
- ▶  $N - 1$  двунаправленная очередь по  $M - 2$  элемента

Парковка

День 2 Задача 4

Ваши варианты?



Парковка

День 2 Задача 4

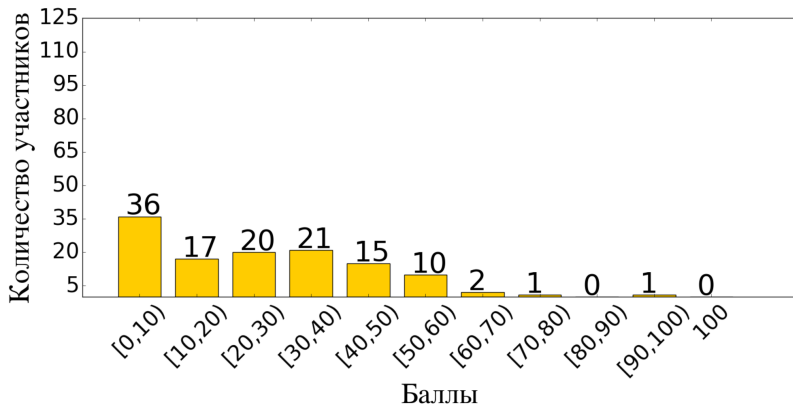
Сложность задачи:

Средняя

# День 2 Задача 2

## Результаты

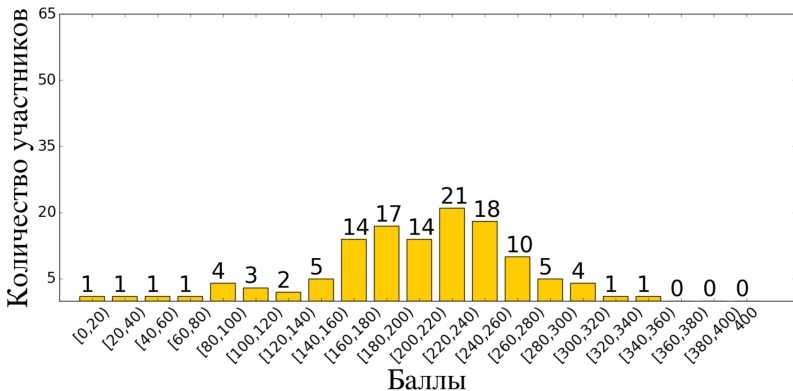
Распределение баллов по задаче 4 второго дня



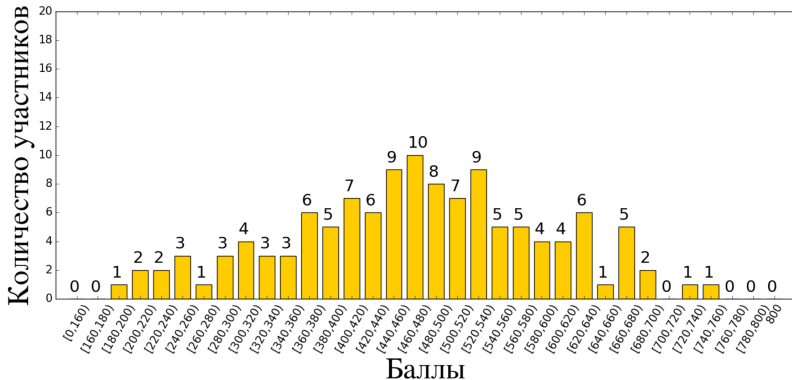
# День 2

## Результаты

Распределение суммы баллов по второму дню



## Распределение итоговой суммы баллов



Спасибо за внимание